

В. С. Петровский

Математические модели лиственничных стволов, их точность и применение

(Сибирский технологический институт)

В наших работах [5, 8] разработана методика определения математических моделей древесных стволов, выраженных в виде уравнения образующей. Полученные математические модели находятся в полном соответствии с теоретическими положениями лесной таксации [8].

В этой статье рассматривается точность уравнения образующей лиственничных стволов и вопросы применения этих уравнений для решения некоторых прикладных задач.

Для получения уравнения образующей лиственницы в 1959—1964 гг. в ряде ЛПХ Красноярского края и Иркутской области нами было обмерено более 600 шт. стволов.

По лиственничным хлыстам, поступающим в раскряжевку, определено их уравнение образующей следующего вида:

$$2x = d_{0,5H} \left[\sqrt{2 \left(1 - \frac{y}{H}\right)} + 6,37 \left(\frac{y}{H}\right)^4 - 13,66 \left(\frac{y}{H}\right)^3 + \right. \\ \left. + 10,3 \left(\frac{y}{H}\right)^2 - 3,08 \left(\frac{y}{H}\right) + 0,275 \right], \quad (1)$$

где $2x$ — диаметр хлыста в месте измерения без коры;

y — расстояние от комля хлыста до места измерения диаметра;

H — длина хлыста;

$d_{0,5H}$ — диаметр на половине длины хлыста.

Следует иметь ввиду, что хлыст в отличие от ствола стоячего дерева имеет диаметр в комле меньше, чем на шейке корня, а диаметр в вершине хлыста не равен нулю.

Для определения уравнения образующей стволов стоячих

деревьев лиственницы было обмерено на месте повала около 400 деревьев, получена математическая модель стволов:

$$2x = d_{0,5H} \left[6,507 \left(\frac{y}{H} \right)^4 - 16,343 \left(\frac{y}{H} \right)^3 + 12,957 \left(\frac{y}{H} \right)^2 - 4,902 \left(\frac{y}{H} \right) + 1,868 \right]. \quad (2)$$

Уравнение (1) может быть пересчитано и приведено к более простому общему виду уравнения (2).

Наши уравнения образующей принципиально отличаются от известных уравнений Белоноговского [2], Вимменауэра, Гогендаля, Метцгера, Козицина [1, 4]. Уравнения названных авторов дают большие ошибки и не отражают действительной формы древесных стволов.

Полученные нами математические модели имеют следующие основные принципиальные особенности:

1. Если разделить уравнения (1, 2) на $d_{0,5H}$, то получим формулы изменения относительного диаметра $\frac{2x}{d_{0,5H}}$ по $\frac{y}{H}$ —

относительной длине. В этой формуле имеется корректный переход от относительных размеров к абсолютным размерам каждого ствола, для чего в формулу необходимо подставить конкретные $d_{0,5H}$ и H .

2. В качестве базовых размеров математической модели используется высота H и диаметр ствола на середине длины $d_{0,5H}$. Эти параметры наиболее полно характеризуют форму, полндревесность, объем и другие характеристики ствола. Сечения ствола на середине длины наиболее близки к окружности, имеют высокую стабильность и не зависят от влияния случайных факторов формообразования: чрезмерной закомелстости, вершинных искривлений и двувершинностей. Площади сечения на середине длины, вычисленные по формулам круга, равны истинным площадям или близки к ним, чего нельзя сказать про другие сечения, расположенные выше или ниже сечения на середине длины ствола.

3. Объем ствола в наибольшей степени характеризуется его высотой, диаметром на середине длины и биологическими особенностями формообразования стволов каждой породы. Биологические особенности формообразования лиственничных стволов нашли свое отражение в величинах коэффициентов уравнений (1, 2). Подобные коэффициенты для сосны, ели, пихты имеют иные значения.

4. Наши уравнения образующей по породам, в том числе

и по лиственнице, охватывают весь практически встречающийся диапазон изменения форм стволов по разрядам высот и q_2 [8]. Подобных уравнений до появления наших работ не было [1, 4].

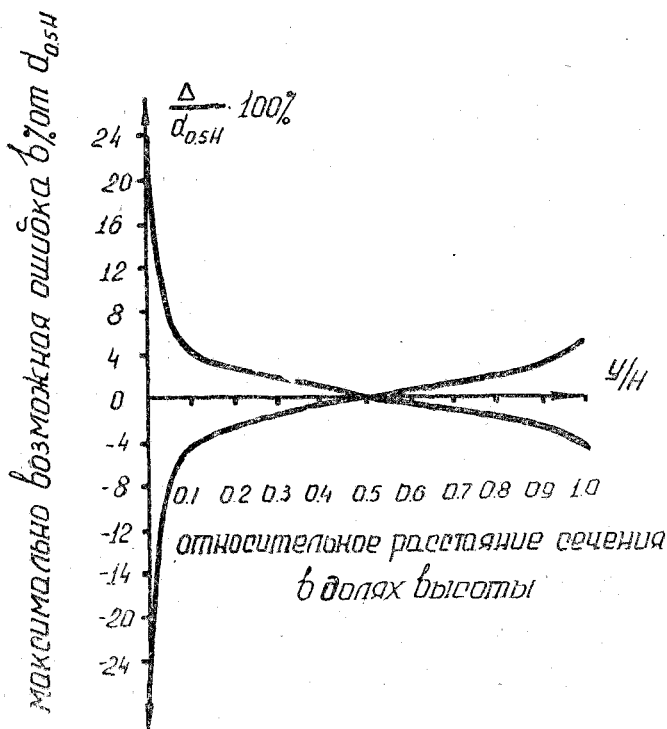


Рис. 1. График изменения максимально возможных ошибок модели лиственничных хлыстов в % от $d_{0.5H}$ по относительной длине $\frac{y}{H}$.

5. Уравнения образующей находятся в полном соответствии с работами проф. В. К. Захарова [3], с учением немецких ученых Кронна, Продана, Дитмара о стабильности чисел сбега по относительным высотам [1].

Но стволы лиственницы, как и стволы других пород, являются объектами биологического происхождения, формирующимися под влиянием внешней среды. Поэтому даже наши наиболее точные математические модели будут давать какие-то ошибки, ибо абсолютно точных уравнений образующей стволов быть не может. Мы провели анализ точности уравнения образующей лиственничных хлыстов, поступающих в

раскрыжевку. По этим данным построен график изменения максимально возможных ошибок в процентах от $d_{0,5н}$ по относительной длине (рис. 1). Статистические показатели изменения ошибок математической модели лиственничных хлыстов по относительной длине приведены в следующей таблице.

Таблица 1

Показатели	Относительные расстояния сечений в долях высоты										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Относительный диаметр $\frac{2x}{d_{0,5н}}$	1,685		1,232		1,072		0,902		0,65		0,206
		1,392		1,14		1,0		0,783		0,514	
Максимально возможная ошибка $\Delta\% = \frac{\Delta}{d_{0,5н}} \cdot 100\%$	23	4,5	3,1	2,0	1,2	0	0,8	1,5	1,9	3,2	5,1
Средняя квадратичная ошибка в % от $d_{0,5н}$	7,9	1,8	0,9	0,47	0,32	0	0,21	0,3	0,52	1,24	3,1

Из этой таблицы видно, что уравнение образующей хлыстов лиственницы даст существенные ошибки в комлевом и вершинном торце хлыстов. Значительное варьирование фактических диаметров в комлевом сечении относительно расчетного объясняется рядом причин. При летней заготовке леса высота пней будет меньше, чем при зимней. Поэтому хлысты летней заготовки более закомелстые. Кроме того, лиственничные стволы, выросшие на крутых склонах, на сырых местах более закомелстые, чем стволы, выросшие на равнинных и незаболоченных почвах.

Варьирование вершинных диаметров хлыстов объясняется технологическими особенностями лесозаготовок: способами трелевки, погрузки, вывозки, а также временем года. Так зимой несколько увеличивается средний вершинный диаметр хлыстов, вследствие возросшей хрупкости древесины и более интенсивными обломами вершин.

Нами был проведен анализ причин ошибок уравнений образующей в других сечениях ствола. При этом установлено, что отклонения фактических диаметров от расчетных вызваны в основном также случайными факторами. Некоторая часть стволов имеет овальность сечений разной степени в

комлевой и реже в вершинной части. Но если определять диаметр в виде полусуммы двух взаимно перпендикулярных диаметров, то ошибки зачастую близки к нулю. Вдутья на поверхности стволов от заросших сучков и других причин вносят некоторые погрешности. Для математических моделей в коре неравномерность, кусочность, шероховатость коры вносят также отклонения диаметров от расчетных. Отклонения фактических диаметров от расчетных будут также зависеть от точности измерительного инструмента, особенно при измерении диаметров хлыстов без коры в разных сечениях.

Рассмотрим влияние ошибок уравнения образующей на точность решения наших задач раскроя древесины.

В результате наблюдений установлено, что зона раскроя ствола на сортименты (зона размещения пропилов), не считая коротких откомлевок, распространяется от $0,15H$ до $0,92H$. Следовательно, ошибки уравнения образующей от рассмотренных причин за пределами этой зоны не влияют на точность решения задач раскроя и оптимизации раскряжевки.

Если имеется крупномерный хлыст лиственницы диаметром на середине длины 30 см, то максимально возможная ошибка расчетных диаметров на концах зоны распила будет равна 9 мм. среднеквадратичная ошибка около 4 мм. Как видно из этого примера, ошибки математической модели в зоне распила будут незначительными, основная масса хлыстов имеет диаметры в зоне распила, равные или очень близкие к расчетным. Поэтому встречающиеся небольшие ошибки уравнения образующей не оказывают ощутимого влияния на точность решения задач теории раскроя и автоматической оптимизации раскряжевки.

Наличие достаточно хороших математических моделей стволов (хлыстов) лиственницы и других пород позволяет решать целый ряд ранее не решаемых задач [7, 8, 9].

1. По принятой схеме раскроя можно вычислить основные показатели раскряжевки.

2. По заданным экстремальным показателям раскряжевки—определить необходимую схему раскроя.

3. Для случая продольной распиловки бревен в развал можно по каждому хлысту найти схему раскроя, максимизирующую объемный выход обрезных пиломатериалов.

4. На основании теоретических положений решений задач по трем названным пунктам, а также по результатам других работ [6] легко строятся алгоритмы автоматического оптимального управления раскряжевыми агрегатами линий первичной обработки древесины.

5. Математические модели стволов позволяют с помощью

электронно-вычислительных машин эффективно решать ряд задач лесной таксации, например составлять таблицы сбega и объема [10].

Возможность применения уравнений образующей не исчерпывается решением перечисленных задач. Рассмотрим далее вопрос использования математической модели лиственнойницы для решения еще не решенных задач строения ствола.

I. Определим сечения, которые делят поверхность ствола, хлыста на десять равных по площади частей S_1, S_2, \dots, S_{10} и определим уравнение полной площади поверхности ствола, хлыста. Метод решения. Имеем $S_1 = S_2 = \dots = S_{10}$.

$$\begin{aligned} \text{Здесь } S_1 &= \pi \int_0^{y_1} x\left(\frac{y}{H}\right) dy; & S_2 &= \pi \int_{y_1}^{y_2} x\left(\frac{y}{H}\right) dy; \dots \\ & & y_{10} &= H \\ \dots; S_{10} &= \pi \int_{y_9}^{y_{10}} x\left(\frac{y}{H}\right) dy. \end{aligned} \quad (3)$$

Задача сводится к отысканию постоянных y_1, y_2, \dots, y_9 .

$$\text{Введем в рассмотрение функцию } \Phi(t) = \int_0^t f(t) dt. \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что площадь поверхности ствола, хлыста от комля до некоторого сечения, отстоящего от комля на расстоянии y , выражается через функцию $\Phi(t)$. Действительно,

$$S(y) = \frac{\pi}{2} d_{0,5H} \int_0^y f\left(\frac{y}{H}\right) dy = \frac{\pi}{2} d_{0,5H} H \cdot \Phi\left(\frac{y}{H}\right). \quad (5)$$

Полная площадь боковой поверхности ствола тогда определяется:

$$S_{\text{пол}} = \frac{\pi}{2} d_{0,5H} \cdot H \cdot \Phi(1). \quad (6)$$

Задача об определении y_1, y_2, \dots, y_9 состоит в нахождении таких значений y , при которых отношение $\frac{S(y)}{S_{\text{пол}}}$ принимает зна-

чения: 0,1; 0,2; 0,3; . . . ; 0,9. Но $\frac{S(y)}{S_{пол}} = \frac{\Phi(t)}{\Phi(1)}$ и следовательно, достаточно найти те значения t_j , при которых функция $\frac{\Phi(t)}{\Phi(1)}$ принимает значения 0,1; 0,2; 0,3; . . . ; 0,9. Соответствующие значения y_j находятся после этого по формуле

$$y_j = t_j H ; \quad j = 1, 2, 3, \dots, 9. \quad (7)$$

Для отыскания t_j поступаем следующим образом: насчитываем значения функции $\Phi(t)$ (вычисляется функция $\Phi(t)$ как интеграл по стандартной программе СП-0124 на вычислительной машине) при $0 \leq t \leq 1$ с шагом по t 0,01, т. е. в точках 0,01; 0,02; 0,03; . . . ; 0,99; 1,00. Затем находим отношение $\frac{\Phi(t)}{\Phi(1)}$ и определяем точки t , при которых это отношение принимает значения 0,1; 0,2; 0,3; . . . ; 0,9. Результаты этих расчетов для лиственницы приведены в таблице 2

Таблица 2

Объект	Координаты сечений, делящих боковую площадь поверхности на десять равных частей								
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9
Ствол стоячего дерева	0,054Н	0,116Н	0,186Н	0,262Н	0,343Н	0,428Н	0,520Н	0,620Н	0,743Н
Хлыст	0,061Н	0,130Н	0,204Н	0,282Н	0,376Н	0,465Н	0,564Н	0,673Н	0,807Н

Полная площадь боковой поверхности:

$$\begin{aligned} \text{а) ствола } S_{пол} &= 1,495 \cdot d_{0,5н} \cdot H = a \pi d \cdot H = \\ &= 0,476 \cdot \pi d_{0,5н} \cdot H, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{б) хлыста } S_{пол} &= 1,524 \cdot d_{0,5н} \cdot H = a \pi d_{0,5} \cdot H = \\ &= 0,485 \cdot \pi d_{0,5н} \cdot H, \end{aligned} \quad (9)$$

где a — коэффициент площади боковой поверхности.

Центр тяжести по площади боковой поверхности лиственницы находится на стволах стоячих деревьев на расстоянии 0,343Н от шейки корня, на хлыстах на расстоянии 0,376Н от комлевого торца. Формула 8 может использоваться в лесной таксации для вычисления прироста.

II. Найдем сечения, которые делят объем ствола, хлыста на 10 равных частей и определим полный объем ствола, хлыс-

Таблица 3

Объект	Координаты сечений, делящих объем на десять равных частей								
	у ₁	у ₂	у ₃	у ₄	у ₅	у ₆	у ₇	у ₈	у ₉
Ствол	0,034Н	0,075Н	0,123Н	0,18Н	0,248Н	0,325Н	0,411Н	0,509Н	0,631Н
Хлыст	0,040Н	0,087Н	0,143Н	0,208Н	0,282Н	0,364Н	0,455Н	0,561Н	0,700Н

Полный объем листовичницы:

$$а) \text{ ствола } U_{пол} = F \frac{\pi}{4} d_{0,5н}^2 \cdot H = 1,087 \frac{\pi}{4} d_{0,5н}^2 \cdot H, \quad (10)$$

$$б) \text{ хлыста } U_{пол} = F \frac{\pi}{4} d_{0,5н}^2 H = 1,042 \frac{\pi}{4} d_{0,5н}^2 \cdot H. \quad (11)$$

та. Эта задача решена аналогичным математическим методом, полученные результаты приведены в таблице 3.

Величину F мы определили как постоянное видовое число древесной породы, и как показали проверки [8], формулы 10, 11 имеют более высокую точность, чем все известные формулы вычисления объема стволов, хлыстов.

Центр тяжести по объему листовичницы находится в стволах стоячих деревьев (без веса кроны) на расстоянии 0,248Н от шейки корня, в хлыстах на расстоянии 0,282Н от комлевого торца. Данные о распределении объема по длине хлыста и координата центра тяжести (по объему) необходимы при динамических расчетах поперечных, продольных транспортеров, подъемно-транспортных устройств автоматических линий первичной обработки древесины.

III. Представляет существенный научный интерес вопрос определения длины боковой кривой стволов стоячих деревьев. Метод решения. Имеем уравнение образующей (2) общего вида

$$2x = d_{0,5н} \cdot f\left(\frac{y}{H}\right).$$

Длина кривой определяется по известной в математике формуле

$$L = \int_b^a \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy.$$

Для нашего случая

$$L = \int_0^H \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \quad (12)$$

или

$$L = H \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{d_{0,5H}}{2H}\right)^2 \left[\frac{d}{\left(\frac{y}{H}\right)} \cdot f\left(\frac{y}{H}\right)\right]^2} d\left(\frac{y}{H}\right) \quad (13)$$

Переходя в интеграле от переменной y к переменной

$$t = \frac{y}{H}, \text{ получим}$$

$$L = H \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{d_{0,5H}}{2H}\right)^2 \left(\frac{df}{dt}\right)^2} dt \quad (14)$$

Так как $\frac{d_{0,5H}}{2H} \ll 1$, то можно для вычисления

длины образующей воспользоваться приближенной формулой, которая, однако, дает значение интеграла с достаточно большой точностью:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{d_{0,5H}}{2H}\right)^2 \left(\frac{df}{dt}\right)^2} dt \approx \\ & \approx \int_0^1 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d_{0,5H}}{2H}\right)^2 \cdot \left(\frac{df}{dt}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{d_{0,5H}}{2H}\right)^2 \cdot \left(\frac{df}{dt}\right)^4 \right] dt \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } L = H \left[1 + a_1 \left(\frac{d_{0,5H}}{H}\right)^2 - a_2 \left(\frac{d_{0,5H}}{H}\right)^4 \right],$$

$$\text{где } a_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{df}{dt}\right)^2 dt; \quad a_2 = \frac{1}{8} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{df}{dt}\right)^4 dt.$$

На ЭВМ М-20 были подсчитаны коэффициенты a_1 , a_2 и получено конечное уравнение длины боковой кривой листовых ствол

$$L = H \left[1 + 15,833 \left(\frac{d_{0,5H}}{H} \right)^2 - 419,62 \left(\frac{d_{0,5H}}{H} \right)^4 \right]. \quad (15)$$

Толщина стволов существенно увеличивает длину боковой кривой. Так, если ствол имеет высоту $H=30$ м, диаметр $d_{0,5H}=0,2$ м, то длина кривой $L=30$ м 2 см. Для ствола с высотой $H=30$ м, диаметром $d_{0,5H}=0,5$ м длина боковой кривой $L=30$ м 13 см.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анучин Н. П. Лесная таксация. ГЛБИ. М., 1960.
2. Белоновский И. И. Об исследовании формы древесного ствола. «Лесной журнал», 1917, № 1—3.
3. Захаров В. К. Исследование формы древесных стволов. Научные доклады высшей школы, Лесоинженерное дело, вып. 1. М., «Сов. наука», 1958.
4. Захаров В. К. Лесная таксация. «Высш. школа», М., 1961.
5. Петровский В. С. Исследование образующей древесных стволов. «Лесное хозяйство», 1964, № 9.
6. Петровский В. С. Алгоритмизация раскряжевки хлыстов. «Лесная промышленность», 1963, № 7.
7. Петровский В. С. Построенные системы автоматической оптимизации раскря стволов. ИВУЗ, «Лесной журнал», 1964, № 4.
8. Петровский В. С. Разработка и исследование методов таксации хлыстов и бревен в системе автоматического управления раскряжевочными агрегатами. «Лесной журнал», 1966, № 3.
9. Петровский В. С. Оптимизация раскря стволов (на автоматических линиях). «Лесная промышленность», 1967, № 2.
10. Петровский В. С. Гипотеза В. К. Захарова в вопросах автоматического программирования раскря древесных стволов. Сб. трудов СТИ, С.с.кнпя лесохозяйственная, 1964, Красноярск.